

# Eine Theorie endogener Zeitdiskontierung\*

Von Bruno S. Frey und Hans Jürgen Ramser

Die tatsächliche Zeitdiskontierung wird in Verbindung mit der Wiederwählerwartung der Regierung gebracht, die ihrerseits von der Wirtschaftslage abhängt. Mit Hilfe des Maximum-Prinzips wird die optimale Wachstumspolitik für eine demokratische Regierung abgeleitet, die möglichst lange an der Macht bleiben will, und mit dem gesellschaftlichen Optimum verglichen.

## I. Einleitung

Zeitdiskontierung spielt in der intertemporalen Wirtschaftstheorie und -politik eine zentrale Rolle. Dies gilt sowohl für mikro- wie für makroökonomische Fragestellungen. So ist die Diskontrate beispielsweise ebenso ein wichtiger Faktor bei der Projektauswahl im Rahmen von Nutzen-Kosten-Analysen, wie sie in der Theorie des optimalen Wachstums die Höhe der Investitionsquote entscheidend mitbestimmt. Angesichts dieses Stellenwertes erstaunt es, wie wenig intensiv sich die wirtschaftstheoretische Forschung bisher mit normativen und positiven Aspekten der Zeitdiskontierung beschäftigt hat.

Im Rahmen normativer Fragestellungen werden folgende Ansätze vorgeschlagen (vgl. auch *Eckstein* 1961):

- (a) *Keine Analyse*; die Diskontrate ist „irgendwie“ vorgegeben, beispielsweise ausdrücklich in das Belieben der Planungsinstitution gestellt: „The rate of discount should be the rate of discount which the planner places over future satisfaction compared with the present“ (*Chakravarty* 1967, S. 157). Diese Vorstellung ist typisch für die Theorie des optimalen Wachstums;
- (b) die Diskontrate wird durch stichprobenmäßige *Befragung der Bevölkerung* ermittelt;
- (c) die Diskontrate wird *Sterbetabellen* entnommen und entspricht dann der Wahrscheinlichkeit, mit der ein repräsentatives Individuum das nächste Jahr nicht überlebt;

---

\* Die Autoren sind ihren Mitarbeitern, insbesondere *Christophe Deissenberg*, für hilfreiche Diskussionen dankbar.

- (d) die Diskontrate wird aus dem aggregierten *Verhalten der Gesellschaft* geschlußfolgert. In einer einfachen Version wird vom Marktzinssatz oder der Profitrate für private Investitionen ausgegangen. Bei etwas differenzierterer Betrachtungsweise geschieht die Bestimmung der Diskontrate durch Gleichsetzung der tatsächlichen mit der optimalen Investitionsquote (vgl. *Meira* 1968);
- (e) die Diskontrate wird aus beabsichtigten oder bereits realisierten Strategien öffentlicher Entscheidungsträger deduziert.

Diese Alternativen, die hier nicht kommentiert werden sollen, haben z. T. auch für eine positive Theorie der Diskontrate Bedeutung. Dies gilt insbesondere für (d) und (e), da auf die wenig überzeugende Hypothese der Kongruenz individueller und gesellschaftlicher Präferenz verzichtet wird (vgl. *Strotz* 1955 - 56, *Sen* 1961).

Die vorliegende Arbeit will in erster Linie einen Beitrag zur positiven Theorie der Diskontrate leisten<sup>1</sup>: die Diskontrate wird als Ergebnis des Zusammenspiels von wirtschaftlichem und politischem System erklärt. Insofern wird im Ansatz durchaus ähnlich wie unter (d) und (e) argumentiert. Der grundlegende Unterschied besteht allerdings darin, daß dort nur konstatiert, hier dagegen eine Theorie entwickelt wird.

Zugrundegelegt wird eine moderne Wirtschaft mit demokratisch gewählter Regierung. Das Ziel der regierenden Partei wird darin gesehen, möglichst lange im Amt zu bleiben, wobei die „Wiederwahlchance“ vom Konsumstandard der Bevölkerung abhängt. Zur Beeinflussung der Wiederwahlchance soll die Regierung in der Lage sein, die intertemporale Allokation der Ressourcen festzulegen. Es geht für eine Regierung also darum, den im Sinne ihres Fortbestehens optimalen Konsumpfad zu fixieren. Dieser Konsumpfad enthält implizit eine Zeitdiskontierung (endogene Diskontrate), die wesentlich von der Wiederwahlchance bestimmt ist.

Der Zusammenhang läßt sich leicht erkennen, wenn Extremfälle betrachtet werden:

- (a) Eine Regierung hält einen verhältnismäßig niedrigen Konsumstandard für ausreichend, um erneut im Amt bestätigt zu werden. Da sie sich hohe Investitionen leisten kann, bestehen gute Aussichten für eine lange ununterbrochene Regierungszeit mit langfristig hohem Konsumstandard. Die Diskontrate dieses Regimes ist offenbar sehr gering.

<sup>1</sup> Natürlich ist grundsätzlich auch eine normative Interpretation möglich, anders als in der Theorie des optimalen Wachstums allerdings im Sinne der Konzipierung parteipolitisch optimaler Strategien.

- (b) Nur sehr bedeutende Konsumkonzessionen werden nach Meinung der Regierung zu einer nennenswerten Chance führen, die nächsten Wahlen zu gewinnen. Um zu überleben, wird bei gleichen technischen Möglichkeiten wie unter (a) die Investitionsquote hier wesentlich niedriger angesetzt. Damit fehlen die Voraussetzungen für eine längerfristige Amtsperiode. Im Ergebnis ist die endogene Diskontrate sehr hoch<sup>2</sup>.

Auch wenn beim Modell des politischen Sektors zunächst an eine Demokratie gedacht ist, stellen sich für autoritäre Regime grundsätzlich die gleichen Probleme. Natürlich ist zu beachten, daß derartigen Regierungen zusätzlich andere Mittel zur Verfügung stehen, eine „Wiederwahl“ durchzusetzen resp. an der Macht zu bleiben — angefangen von der Monopolisierung der Massenmedien bis hin zur Ausschaltung jeder Opposition. Da autoritäre Regime folglich weniger „konsumabhängig“ sind, dürfte in der Tendenz der erwähnte Fall (a) typisch sein.

Im folgenden Abschnitt II wird zunächst das Modell entwickelt; es setzt sich aus zwei Teilsystemen zusammen — dem politischen und ökonomischen System —, die durch das Regierungsverhalten miteinander verklammert sind. Abschnitt III enthält die formale Analyse und Interpretation, und in IV werden mögliche Erweiterungen diskutiert.

## II. Das Modell

### 1. Das Regierungsverhalten

Unter Benutzung des Konzeptes der *Wiederwahlwahrscheinlichkeit* kann die Zielfunktion der Regierung verschieden begründet werden. Die relative Wahrscheinlichkeit, in der Periode  $n$  gewählt zu werden, sei  $p_n$  mit  $0 \leq p_n \leq 1$ . Grundsätzlich kann eine Regierung  $t = 1, 2, \dots, \infty$  Perioden im Amt bleiben. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit, in der Periode 1 zu regieren und in der Periode 2 abgewählt zu werden  $p_1 \cdot (1 - p_2)$ ; die Wahrscheinlichkeit, in den Perioden 1 und 2 zu regieren und in der Periode 3 abgewählt zu werden,  $p_1 \cdot p_2 \cdot (1 - p_3)$  etc. Allgemein gilt für die Wahrscheinlichkeit,  $n$  Perioden durchgehend zu regieren und in der Periode  $(n + 1)$  abgewählt zu werden<sup>3</sup>:

<sup>2</sup> Das schließt im Prinzip nicht aus, daß auch die Zeit „nach Ablösung“ in die Planungen eingeht: eine Regierung kann z. B. durch Abbau des Realkapitalstocks die Überlebenschance ihrer Nachfolger derart ungünstig beeinflussen, daß ein neuerlicher Wechsel im Amt nicht lange auf sich warten läßt. Derartige Überlegungen, die eine Anwendung der Theorie differentieller Spiele erfordern, werden in diesem Beitrag allerdings nicht berücksichtigt.

<sup>3</sup> Hier ist unterstellt, daß die Wahrscheinlichkeit  $p_n$  unabhängig ist von  $p_{n-i}$   $i = 1, 2, \dots, n$ . Vgl. dazu die abschließenden Bemerkungen.

$$(1) \quad (1 - p_{n+1}) \cdot \prod_{t=1}^n p_t$$

Eine *erste* und vermutlich die nächstliegende Hypothese besteht in der Annahme, daß eine Regierung an einer möglichst langen ununterbrochenen Führung der Regierungsgeschäfte interessiert ist. Das bedeutet, daß die Zielfunktion der erwarteten Regierungsdauer entspricht. Sie ist die Summe aus den verschiedenen Längen der Regierungszeit  $t = 1, 2, \dots, \infty$ , gewichtet mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten (1), also

$$(2)' \quad \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot (1 - p_{t+1}) \cdot \prod_{\tau=1}^t p_{\tau}$$

Für eine *zweite* Begründung könnte man von einer diskreten Nutzenfunktion ausgehen, die den Wert 1 annimmt, wenn sich die betrachtete Partei an der Macht befindet, und den Wert 0, wenn sie nicht regiert. Der Erwartungsnutzen einer durchgehenden Regierungszeit von  $n$  Perioden ist dann der mit  $n$  multiplizierte Ausdruck (1). Die Summe aller Erwartungsnutzen aus den verschiedenen möglichen Amtsperioden  $t = 1, 2, \dots, \infty$  entspricht (2)'.

Für die nachfolgende Analyse wird plausiblerweise angenommen, die Wahrscheinlichkeit, gewählt zu werden, liege stets unter 1, de facto gelte also  $0 \leq p_n < 1$ . Unter diesen Umständen lautet die definitive Zielfunktion<sup>4</sup>

$$(2) \quad \sum_{t=1}^{\infty} \prod_{\tau=1}^t p_{\tau}$$

Schreibt man  $\prod_{\tau=1}^t p_{\tau} = Z_t$ , so läßt sich (2) auch wie folgt darstellen

$$(3) \quad \sum_{t=1}^{\infty} Z_t \text{ mit } Z_1 = p_1, Z_t = p_t \cdot Z_{t-1}$$

<sup>4</sup> Zum Beweis sei (2)' zunächst auf den endlichen Bereich  $t = 1, 2, \dots, m$  beschränkt. Gilt z. B.  $m = 3$ , so lautet der entwickelte Ausdruck (2)'

$$\begin{aligned} & 1 \cdot (1 - p_2) \cdot p_1 + 2 \cdot (1 - p_3) \cdot p_1 \cdot p_2 + 3 \cdot (1 - p_4) \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \\ & = p_1 + p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 - 3p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \end{aligned}$$

Allgemein kann also unter diesen Umständen für (2)' auch

$$(*) \quad \sum_{t=1}^m \prod_{\tau=1}^t p_{\tau} - m \cdot \prod_{t=1}^{m+1} p_t$$

geschrieben werden. Die erwähnte Obergrenze von  $p_n$  sei nun  $(1 - \varepsilon)$  mit  $0 < \varepsilon < 1$ . Nach der *L'Hospital'schen* Regel gilt  $\lim [m \cdot (1 - \varepsilon)^m] = 0$ . Beim Grenzübergang verschwindet also das zweite Glied in (\*).

Zur Vereinfachung der formalen Analyse soll im folgenden von der kontinuierlichen Version von (3) ausgegangen werden. Sie lautet

$$(4) \quad \int_0^{\infty} Z(t) dt \quad \text{mit} \quad Z(0) = p(0), \\ \dot{Z}(t) = [p(t) - 1] \cdot Z(t)$$

wobei  $\dot{Z}(t) \equiv dZ/dt$ .

## 2. Das politische System

Der komprimierte Ausdruck des politischen Systems ist die Wiederwahlfunktion. Sie hängt im Rahmen unseres einfachen Modells nur vom Pro-Kopf-Einkommen  $c$  ab:

$$(5) \quad p(t) = \Phi [c(t)], \quad 0 \leq p(t) < 1$$

Zur Gestalt von  $\Phi(c)$  sind verschiedene plausible Hypothesen denkbar; eine besonders naheliegende Annahme ist in Fig. 1 verdeutlicht (ausgezogene Kurve).

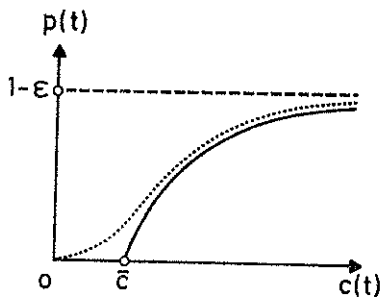


Fig. 1

Politische Reaktionen auf Konsumveränderungen finden also erst oberhalb eines Mindestkonsums  $\bar{c}$  statt; sie sind dann zwar stets positiv, nehmen aber an Intensität ab. Für die folgende Analyse soll diese Funktion durch die gestrichelte Kurve in Fig. 1 approximiert werden. Sie weise stetige erste und zweite Ableitungen auf und für  $c = \bar{c}$  einen Wendepunkt<sup>5</sup>. Bekanntlich werden derartige Funktionstypen als Schätzfunktionen für *Engel-Kurven* benutzt — eine Parallele, die durchaus für unsere Annahme spricht.

Es sei daran erinnert, daß  $p$  die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, (wieder) gewählt zu werden, und nicht etwa den Stimmenanteil der

<sup>5</sup> Man stelle sich beispielsweise den konkreten Funktionstyp  $p = (1 - \epsilon) \exp(-2\bar{c}/c)$  vor.

Regierungspartei.  $p$  berücksichtigt also implizit die institutionellen Gegebenheiten in Form von Entscheidungsregeln. Bei nur zwei Parteien und proportionaler Vertretung im Parlament genügt zum Wahlsieg ein (sicherer) Anteil von 50 %; bei mehr Parteien und bestimmter Wahlkreiseinteilung kann sogar ein weit geringerer Stimmenanteil zum Wahlsieg genügen. Bei gegebenen institutionellen Bedingungen reagiert jedoch die Wiederwahlwahrscheinlichkeit in ähnlicher Weise auf Veränderungen der wirtschaftlichen Variablen — hier des Konsums — wie bei Popularitäts- oder Wahlfunktionen, die kürzlich mit modernen statistischen Techniken für verschiedene Länder empirisch geschätzt wurden (vgl. Goodhart and Bhansali 1970, Kramer 1971, Frey und Garbers 1972, Stigler 1973).

Lage und Gestalt der Wiederwahlfunktion können von sehr verschiedenen Bestimmungsgründen abhängen. Dafür kann *erstens* sehr einfach unterschiedliche Konsummentalität verantwortlich sein. Wenn die Konsummentalität ihrerseits auch das Ergebnis des tatsächlich „erlebten“ Konsumstandards ist, dann ist *zweitens* vorstellbar, daß die ökonomische Situation im Zeitpunkt der Übernahme der Regierungsgeschäfte maßgeblich die Lage der  $\Phi$ -Funktion beeinflußt<sup>6</sup>. Weiter sind *drittens* auch bei gleicher Konsumpräferenz der Bürger und gleicher ökonomischer Ausgangslage Unterschiede zufolge unterschiedlichen „Demokratieniveaus“ vorstellbar. Je weniger ceteris paribus Möglichkeiten bestehen, Konsumwünsche politisch wirksam zu artikulieren (Diktatur), desto höher dürfte bei gleichem Konsum die Chance sein, gewählt zu werden, bzw. hier besser allgemein: an der Macht zu bleiben.

In einer Wirtschaft mit exogen wachsendem technischen Fortschritt (des Harrod-neutralen Typs)  $T(t) = T_0 \exp(\lambda t)$  sind zwei verschiedene Interpretationen des „Konsums“ in Gleichung (5) denkbar:

(i) „Konsum“ kann als Pro-Kopf-Konsum definiert werden

$$(6a) \quad \tilde{c}(t) = C(t) / L(t)$$

wobei  $C(t)$  = gesamter Konsum,  $L(t)$  = Bevölkerung (und gleichzeitig Arbeitseinsatz), die mit der Rate  $n$  zunimmt. Im Gleichgewicht (steady state) wächst  $\tilde{c}(t)$  mit derselben Rate wie der technische Fortschritt, da  $C(t) = C_0 \exp[(n + \lambda)t]$  und  $L(t) = L_0 \exp(nt)$ .

(ii) „Konsum“ kann als Niveau definiert werden, das um den Bevölkerungszuwachs und Fortschritte in der Technik korrigiert wird

$$(6b) \quad c(t) = C(t) / [L(t) \cdot T(t)]$$

<sup>6</sup> Als Indikator könnte etwa die Kapitalausstattung in der Ausgangssituation dienen, die im Rahmen formaler Analyse als zusätzliches Argument in die  $\Phi$ -Funktion eingebaut werden kann.

Im Gleichgewicht bleibt  $c$  konstant; der Gesamtkonsum  $C(t)$  und der effektive Arbeitseinsatz  $L(t) \cdot T(t)$  wachsen mit der gleichen Rate.

Interpretation (ii) trifft zu, wenn die Konsumenten-Wähler sich an einen kontinuierlichen normalen Zuwachs des Konsumniveaus (nämlich mit der „natürlichen“ Rate) gewöhnen und deshalb die Regierungspartei nur vermehrt unterstützen, falls das *Niveau des Wachstumspfad*es sich nach oben verschiebt, d. h. also, wenn der Konsum höher als erwartet ist. Da dies empirischen Beobachtungen zu entsprechen scheint (vgl. *Kramer 1971, Nordhaus 1972*), wird im folgenden Formulierung (6b) verwendet.

### 3. Das wirtschaftliche System

Als Entscheidungsvariable zur Beeinflussung des ökonomischen Systems stehe der Regierung die Investitionsquote zur Verfügung (direkte Investitionstätigkeit des Staates und ausreichende geld- und fiskalpolitische Eingriffsmöglichkeiten). Beschäftigungsprobleme sollen sich nicht stellen, so daß die Investitionsquote nur die Verwendung stets voll ausgelasteter Ressourcen *über die Zeit* zu steuern hat.

Zur Beschreibung der nur aus einem Sektor bestehenden Wirtschaft können dann die üblichen neoklassischen Annahmen getroffen werden. Das wirtschaftliche System kann m. a. W. durch Differentialgleichung (7) erfaßt werden

$$(7) \quad \dot{k} = f(k) - \gamma k - c$$

mit  $k \equiv K/L \cdot T =$  Kapitalintensität gemessen in Effizienzeinheiten,  $\gamma \equiv n + \lambda + \delta$  mit  $\delta$  als bestandsproportionaler Abschreibungsrate; die Pro-Kopf-Produktionsfunktion  $f(k)$  erfülle die *Inada*-Bedingungen.

## III. Formale Lösung des Systems

### 1. Optimierung

Für die Optimierung wird von der kontinuierlichen Fassung der Zielfunktion ausgegangen. Das Optimierungsproblem lautet

$$(8) \quad \max_{c(t)} \int_0^{\infty} Z(t) dt$$

unter:  $Z(t) = \{\Phi[c(t)] - 1\} \cdot Z(t), \quad Z(0) = \Phi[c(0)]$   
 $\dot{k}(t) = f[k(t)] - \gamma \cdot k(t) - c(t), \quad k(0) = k_0$   
 $0 \leq c(t) \leq f[k(t)]$

Man stellt zunächst fest, daß wegen der Eigenschaften von  $\Phi(c)$  das Integral in (8) nach oben beschränkt ist; es gilt stets

$$(9) \quad \int_0^{\infty} Z(t) dt \leq \int_0^{\infty} (1-\varepsilon)^{-\varepsilon t} dt = (1-\varepsilon)/\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$$

Da (8) ein Kontrollproblem ist, kann das Maximumprinzip benutzt werden (vgl. *Intriligator* 1971). Der Hamiltonsche Ausdruck lautet

$$(10) \quad H = Z(t) + q_1(t) \{ \Phi[c(t)] - 1 \} \cdot Z(t) \\ + q_2(t) \{ f[k(t)] - \gamma \cdot k(t) - c(t) \}$$

Der Konsumpfad  $c^*(t)$  sei eine Lösung von (8). Dann ist erstens notwendig, daß  $c^*(t)$  Ausdruck (10) für alle  $t$  maximiert, d. h.

$$(11) \quad \partial H / \partial c = q_1 \cdot \Phi'(c) \cdot Z - q_2 = 0$$

Zweitens muß für den optimalen Verlauf der Schattenpreise gelten

$$(12) \quad \dot{q}_1 / q_1 = -\dot{q}_1 = 1 + q_1 [\Phi'(c) - 1]$$

$$(13) \quad \partial H / \partial k = -\dot{q}_2 = q_2 [f'(k) - \gamma]$$

Schließlich ist die Gültigkeit der folgenden Transversalitätsbedingungen zu verlangen

$$(14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) \geq 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) \cdot Z(t) = 0$$

$$(15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) \geq 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) \cdot k(t) = 0$$

Die Lösung kann auf ein System von drei Differentialgleichungen in  $c$ ,  $k$  und  $q_1$  reduziert werden. Dazu wird (11) nach  $t$  differenziert und  $\dot{Z}/Z$  durch die erste Nebenbedingung aus (8) substituiert; das Ergebnis ist

$$(16) \quad \dot{q}_1 / q_1 + [\Phi'(c) - 1] + \dot{c} \Phi''(c) / \Phi'(c) = \dot{q}_2 / q_2$$

Verwendet man dann in (16) für  $\dot{q}_1$  Beziehung (12), löst nach  $\dot{q}_2/q_2$  und setzt dies in (13) ein, so erhält man

$$(17) \quad \dot{c} = [\Phi'(c) / \Phi''(c)] \{ 1 / q_1 - [f'(k) - \gamma] \}$$

Zusammen mit (12) und der zweiten Nebenbedingung aus (8), d. h.

$$(18) \quad \dot{q}_1 = -1 + q_1 [1 - \Phi'(c)]$$

$$(19) \quad \dot{k} = f(k) - \gamma k - c$$

liegt dann die gewünschte reduzierte Form vor. Die optimalen Zeitprofile  $c^*(t)$ ,  $k^*(t)$  und  $q_1(t)$  müssen also die Beziehungen (17) - (19) zu-



sammen mit der Anfangsbedingung  $k(0) = k_0$  und den Transversalitätsbedingungen (14) und (15) erfüllen.

## 2. Stationäre Punkte

Zur Entwicklung der optimalen Politik wird zunächst die Anfangsbedingung außer acht gelassen. Dann kommen als mögliche Lösungen der oder die (zulässigen) stationären Punkte (Gleichgewichte)  $\dot{c} = \dot{k} = \dot{q}_1 = 0$  in Betracht.

Notwendige Bedingungen für Stationarität sind

$$(20) \quad q_1^* = 1 / [1 - \Phi(c^*)]$$

$$(21) \quad f'(k^*) = [1 - \Phi(c^*)] + \gamma$$

$$(22) \quad c^* = f(k^*) - \gamma k^*$$

Gleichungen (20) - (22) erfüllen die Transversalitätsbedingungen: aufgrund von  $0 \leq \Phi(c) \leq 1 - \varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , ist im Gleichgewicht zunächst  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = q_1^* > 0$ ; da wegen der gleichen Annahme  $\dot{Z}(t) < 0$ , gilt also  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) \cdot Z(t) = 0$ . Aus (16) ist weiter ersichtlich, daß  $\dot{q}_2(t) < 0$  und folglich  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) \cdot k(t) = 0$ .

Die Existenz zumindest eines stationären Punktes ist am einfachsten unter Zuhilfenahme einer Grafik zu beweisen, wobei es nur auf die Lösbarkeit von (21) und (22) ankommt. In Fig. 2 ist daher im 1. Quadranten Beziehung (22) dargestellt. Sie weist ein Maximum für  $\bar{k} = [k \mid f'(k) - \gamma = 0]$  auf;  $\bar{k}$  ist die Kapitalintensität der Goldenen Regel. Die Beziehung zwischen  $c$  und  $k$  nach (21), in der Grafik mit  $\psi(k)$  bezeichnet, ist nur implizit gegeben, läßt sich aber grafisch einfach ermitteln. Zu diesem Zweck wird die rechte Seite von (21) im 2. Quadranten, die linke Seite im 3. Quadranten abgebildet. Mit Hilfe der 45°-Linie im 4. Quadranten ist dann  $\psi(k)$  punktweise konstruierbar.

In der Grafik sind zwei verschiedene Wiederwahlfunktionen untersucht. Man stelle sich dazu die  $\Phi$ -Funktion in Form von  $\Phi(c, \alpha)$  mit  $\Phi_\alpha > 0$ ,  $\Phi_{c\alpha} > 0$  parametrisiert vor<sup>7</sup>. Dann ist größeres  $\alpha$  mit größerer Konsumempfindlichkeit der Gesellschaft interpretierbar. Je größer  $\alpha$  ist, desto schneller steigt die  $\Phi$ -Funktion bzw. desto langsamer die Funktion  $[(1 - \Phi) + \lambda]$ .

Die verschiedenen  $\psi(k)$ -Funktionen beginnen stets bei  $c = 0$ ,  $k = \bar{k} = [k \mid f'(k) = 1 + \gamma]$  und steigen monoton an, da nach (21) im Gesamt-

<sup>7</sup> In der weiteren formalen Diskussion wird auf diese Darstellung verzichtet.



effizienz i. S. von *Phelps-Koopmans* ausgeschlossen. Der tatsächliche Abstand von der Goldenen Regel hängt natürlich von der Gestalt der Wiederwahlfunktion ab. Steigende Konsumempfindlichkeit (steigendes  $\alpha$ ) führt bei eindeutigem Gleichgewicht offensichtlich zu einer Annäherung an die Goldene Regel<sup>9</sup>.

Der gleiche Sachverhalt läßt sich auch mit Hilfe der endogenen Diskontrate ausdrücken. Als Referenzmodell stelle man sich die unter sonst gleichen Voraussetzungen stehende traditionelle Optimierungsaufgabe  $\max \int_0^{\infty} U[c(t)] \exp(-\bar{\rho} t) dt$  vor, deren Gleichgewichtslösung bekanntlich  $f'(k) - \gamma = \bar{\rho}$  lautet. Die exogene Diskontrate  $\bar{\rho}$  wird im vorliegenden Modell durch die endogene, simultan mit der Ermittlung des Gleichgewichts bestimmte Rate  $\rho^* = 1 - \bar{\Phi}(c^*)$  ersetzt. In der Grafik ist diese Rate mit  $\rho_c^*$  resp.  $\rho_k^*$  bezeichnet. Daß sämtliche stationären Punkte zu einer Kapitalintensität unterhalb der Goldenen Regel führen, besagt dann einfach, daß diese Diskontrate stets positiv ist. Weiter sieht man, daß die Diskontrate bei höherer Konsumempfindlichkeit vergleichsweise geringer ist.

### 3. Anpassungspfade

Da eine Regierung immer nur eine begrenzte Zeit — oft sogar nur eine Wahlperiode — an der Macht ist, kommt dem Gleichgewicht nur als Zielpunkt Bedeutung zu, und auch das nur, wenn stabile Politiken existieren. Seine Relevanz liegt also nur in der Rolle, die es im Zusammenhang mit der Bestimmung der optimalen Politik bei expliziter Berücksichtigung der Anfangsbedingung spielt. Da das relevante System aus drei Differentialgleichungen besteht, ist eine Diskussion an Hand eines Phasendiagramms nicht mehr zweckmäßig. Es kann hier nur eine formale Analyse der Stabilitätseigenschaften der stationären Punkte durchgeführt werden. Linearisiert man (17) - (19) in  $\dot{q}_1 = \dot{c} = \dot{k} = 0$ , so erhält man folgende Systemmatrix<sup>10</sup>:

$$(24) \quad J^* = \begin{bmatrix} 0 & -c^*/y(c^*) \cdot q_1^{*2} & -[c^*/y(c^*)] f''(k^*) \\ -q_1^* \cdot \Phi'(c^*) & 1 - \bar{\Phi}(c^*) & 0 \\ -1 & 0 & f'(k^*) - \gamma \end{bmatrix}$$

<sup>9</sup> Bei formaler Berücksichtigung der oben erwähnten Parametrisierung ergibt die implizite Ableitung von (21)  $dk^*/d\alpha = \bar{\Phi}_\alpha / [-f'' - \bar{\Phi}_c (f' - \gamma)]$  wobei  $\bar{\Phi}_\alpha \equiv d\bar{\Phi}/d\alpha$  und  $\bar{\Phi}_c \equiv d\bar{\Phi}/dc$  ist. Dieser Ausdruck ist, sofern nur ein stationärer Punkt existiert, im Gleichgewicht positiv. Bei drei Schnittpunkten gilt dies für den oberen und unteren, bei zwei Schnittpunkten entweder für den oberen oder den unteren.

<sup>10</sup> Der Ausdruck  $c^* \bar{\Phi}''(c^*) / \bar{\Phi}'(c^*)$  ist mit  $y(c^*)$  abgekürzt; natürlich gilt  $y(c^*) < 0$ .

Es werden folgende Abkürzungen gebraucht:

$$\begin{aligned} A &= -c^*/y(c^*) \cdot q_1^2 > 0, & B &= -c^* f''(k^*)/y(c^*) < 0, \\ C &= -q_1 \cdot \Phi'(c^*) < 0, & D &= 1 - \Phi(c^*) > 0 \text{ und} \\ E &= f'(k^*) - \gamma. \end{aligned}$$

Dann lautet die charakteristische Gleichung des Systems

$$(25) \quad -\varphi(D - \varphi)(E - \varphi) - C \cdot A \cdot (E - \varphi) + B \cdot (D - \varphi) = 0$$

Da für stationäre Punkte (21) gelten muß, d. h.  $E = D$ , erhält man folgende Wurzeln

$$(26) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= f'(k^*) - \gamma \\ \varphi_2, \varphi_3 &= 0.5 \{ [f'(k^*) - \gamma] \pm [(f'(k^*) - \gamma)^2 + 4F]^{0.5} \} \\ \text{mit } F &= \{ [f'(k^*) - \gamma] + f''(k^*)/\Phi'(c^*) \} c^* \cdot \Phi'(c^*)/y(c^*) \end{aligned}$$

Das bedeutet zunächst, daß eine Wurzel ( $\varphi_1$ ) stets reell und positiv ist. Für die restlichen beiden Wurzeln ( $\varphi_2, \varphi_3$ ) ist danach zu unterscheiden, ob ein, zwei oder drei stationäre Punkte vorliegen.

Existiert nur *ein stationärer Punkt*, dann gilt in (23) das „<-Zeichen und folglich  $F > 0$ . Beide Wurzeln sind also reell, weisen aber, da die Diskriminante größer ist als  $[f'(k^*) - \gamma]^2$ , entgegengesetzte Vorzeichen auf. Das Gleichgewicht ist damit ein Sattelpunkt, d. h. es existieren genau zwei stabile Pfade, die bei genügend großen  $t$  in diesen Punkt hineinlaufen. Für *zwei stationäre Punkte* ist in einem Fall  $F = 0$ , im anderen  $F > 0$ ; das Gleichgewicht mit  $F = 0$  ist offenbar instabil ( $\varphi_2 = \varphi_1 > 0, \varphi_3 = 0$ ), das Gleichgewicht mit  $F > 0$  wiederum ein Sattelpunkt. Entsprechend sieht man, daß für *drei stationäre Punkte* zwei Sattelpunkte (oberes und unteres Gleichgewicht) und ein instabiler Punkt vorkommen<sup>11</sup>.

Diese Überlegungen machen deutlich, daß unterschiedliche Annahmen über die Wiederwahlfunktion auch bei gleichem Ausgangspunkt zu sehr unterschiedlicher Politik führen können. Angenommen, es gelte  $k_0 < k_{\max}^*$  mit  $k_{\max}^*$  als größtem vorkommenden Gleichgewicht. Im Falle eindeutigen Gleichgewichtes ist  $k_{\max}^* = k^*$ , und die optimale Politik besteht in einer laufenden Erhöhung der Kapitalintensität entlang dem stabilen, in das Gleichgewicht hineinführenden Pfad. Für drei

<sup>11</sup> Für das mittlere Gleichgewicht gilt zunächst  $F < 0$  (s. o.). Die Diskriminante kann also negativ, positiv oder Null sein. Falls sie positiv ist, ist sie aber offenbar kleiner als  $[f'(k^*) - \gamma]^2$ . Es sind also  $\varphi_2$  und  $\varphi_3$  entweder konjugiert komplex mit positivem Realanteil (Diskriminante negativ) oder beide positiv (Diskriminante positiv oder Null). Es tritt folglich entweder ein instabiler Focus oder ein instabiler Knoten auf.

stationäre Punkte  $k_1^* > k_2^* > k_3^*$  kommt es auf das Vorzeichen von  $(k_2^* - k_0)$  an. Ist  $(k_2^* - k_0) > 0$ , so wird die Kapitalintensität auf  $k_3^*$  reduziert, für  $(k_3^* - k_0) < 0$  wird bis auf  $k_1^*$  expandiert, wobei man den jeweils stabilen Pfaden folgt. Sofern eine Regierung also einen zu geringen Kapitalstock geerbt hat, ist eine positive Entwicklung nur bei einer mehr oder weniger drastischen Änderung der Wiederwahlfunktion, d. h. bei veränderten Konsumerwartungen der Wähler möglich. Empirische Untersuchungen deuten darauf hin, daß derartige Veränderungen der Wiederwahlfunktion zu Beginn der Amtsperiode einer neuen Regierung durchaus stattfinden: der neuen Regierung wird ein gewisser Vertrauensvorschuß eingeräumt<sup>12</sup>.

Gibt man die Annahme  $k_0 < k_{\max}^*$  auf, so sind auch bei stets eindeutigem Gleichgewicht unterschiedliche Politiken denkbar. Möglicherweise liegt  $k_0$  für eine Wahlfunktion links, für die andere rechts von  $k_{\max}^*$  (s. Fig. 2). Dann erhält man bei gleicher Ausgangssituation einmal einen expansiven, im anderen Fall einen kontraktiven Prozeß.

Diese Aussagen beziehen sich vorläufig nur auf  $k^*(t)$ . Interessant ist natürlich weiterhin das optimale Zeitprofil der Steuerungsvariablen  $c^*(t)$  und damit der Diskontrate  $1 - \Phi [c^*(t)]$ . Nehmen wir an, es existiere nur ein stationärer Punkt  $k^*$  mit Sattelpunkteigenschaft (wie in Fig. 2). Es sei weiter  $k_0 < k^*$  bei nicht allzu großem Abstand, so daß die Linearisierung vertretbar ist. Falls  $\varphi_3$  die stabile Wurzel ist, wird also für  $k^*(t)$  gelten:

$$(27) \quad k^*(t) = -(k^* - k_0) \exp(\varphi_3 t) + k^*$$

Setzt man in (19)  $t = 0$  und berechnet  $\dot{k}(0)$  aus (27), so erhält man

$$(28) \quad c^*(0) = f(k_0) - \gamma k_0 + \varphi_3 (k^* - k_0)$$

Da  $\varphi_3 < 0$  und  $k > k^* > k_0$ , gilt

$$(29) \quad c^*(0) < f(k_0) - \gamma k_0 < f(k^*) - \gamma k^* = c^*$$

Mit anderen Worten ist also  $\dot{c}^*(t) > 0$ . D. h. ebenso wie in der Theorie des optimalen Wachstums wird der Konsum laufend erhöht. Für die Diskontrate folgt, daß mit einem relativ hohen Satz begonnen wird, der sich laufend ermäßigt.

Man vergegenwärtige sich wiederum zum Vergleich ein Modell optimalen Wachstums mit traditionellem Nutzenfunktional und konstanter exogener Diskontrate, das den gleichen stationären Punkt aufweise wie unser Modell. Dann liegt im traditionellen Ansatz die (exogene)

<sup>12</sup> Vgl. dazu insbesondere Goodhart and Bhansali (1970), S. 58.

Diskontrate praktisch während der gesamten Anpassung unterhalb unserer endogenen Rate. Das bedeutet, daß schneller akkumuliert wird als in unserem Modell. Anders ausgedrückt: der politische Prozeß führt — selbst wenn die Diskontrate am Ende die gleiche Höhe aufweist — zu einer Verlangsamung des Akkumulationstempos. Wenn die Annahme exogener Diskontrate als Spezifikum welfaretheoretisch-normativer Ansätze gesehen wird, so könnten — da unser Modell positiven (oder individuell-normativen) Charakter hat — Unterschiede in den Konsumpfaden als „Preis“ oder „Kosten“ eines politisch-demokratischen Abstimmungsprozesses interpretiert werden. Bei gleicher „Endrate“ bestehen diese Kosten in einer vergleichweisen Benachteiligung wenn nicht der Urenkel, so doch der Enkel zugunsten der heute lebenden Generation. Auf jeden Fall aber zeigt sich, daß die Hypothese einer konstanten Diskontrate für erklärende Modelle vermutlich unzweckmäßig ist.

#### IV. Ausblick

Das hier entwickelte Modell ist noch in mancher Hinsicht — auch bei unveränderten Annahmen — weiter interpretierbar. Insbesondere wäre eine vergleichende Analyse verschiedener Wahlfunktionen und ihrer Wirkung auf Konsumpfad, Diskontrate und erwartete Regierungsdauer von Interesse. Hilfreich könnte in diesem Zusammenhang sein, eine empirisch begründete Typologie von Wahlfunktionen zu entwickeln. Erst dann lassen sich eindeutige Ergebnisse deduzieren. Diese Tatsache ist eher als Stärke des Modells auszulegen. Denn es wäre zweifellos suspekt, wenn schon einige sehr allgemeine Annahmen ausreichen, eine eindeutige Erklärung eines komplexen gesellschaftlichen Zusammenhanges zu liefern.

Zum Ausbau und zur Verallgemeinerung des Modells bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. Hierbei ist zu bedenken, daß die verwendete *analytische* Methode neben ihren Vorzügen — insbesondere die explizite Spezifizierung einer Zielfunktion und die direkte Optimierung — auch Grenzen aufweist, die vor allem in der geringen Zahl noch sinnvoll analysierbarer Differentialgleichungen liegt. Manche Erweiterungen lassen sich besser mit Hilfe von Simulationsansätzen durchführen. Die analytische Methode wurde hier bewußt auf ein möglichst einfaches Modell angewandt, um die aus der Wahl einer bestimmten dynamischen Nutzenfunktion der Regierung folgenden Ergebnisse möglichst klar sichtbar zu machen. Gleichzeitig mit diesem Ansatz sind mehrere Simulationsmodelle unterschiedlicher Komplexität entwickelt worden<sup>13</sup>, in denen Aspekte hervorgehoben werden, die im vorliegenden Optimierungsmodell nur am Rande oder gar nicht behandelt werden.

So ist im vorliegenden Modell u. a. der „Verschleiß“ einer Regierung infolge zunehmender Länge der Amtsperiode nicht berücksichtigt. Dieser Einfluß könnte im Prinzip zwar durch den Ansatz  $p(t) = \Phi[c(t), Z(t)]$  mit  $\Phi_2 < 0$  erfaßt werden. Durchsichtiger allerdings wäre die Einführung des Konzeptes eines „politischen Kapitalstocks“, der einem zeitabhängigen Abbau — ähnlich Abschreibungen auf langlebige Wirtschaftsgüter — unterliegt. Will die Regierung also die laufende Verminderung des „politischen Kapitalstocks“ und damit der Wiederwahlchance bremsen, so muß durch irgendwelche populären Maßnahmen gegengesteuert werden. Die Einbeziehung dieses Zusammenhanges kompliziert den dargelegten Ansatz nicht unbeträchtlich, ist dagegen im Rahmen eines Simulationsmodells unproblematisch.

Eng damit zusammenhängend ist anzunehmen, daß die verschiedenen Wahlergebnisse sich gegenseitig beeinflussen, die Wiederwahlwahrscheinlichkeiten zu verschiedenen Zeitpunkten also nicht voneinander unabhängig sind (bisherige Annahme). Ein hoher Wahlerfolg in der Vergangenheit kann kumulative Effekte haben und die Bürger veranlassen, in Zukunft die herrschende Partei noch verstärkt zu unterstützen. Plausibler ist die gegenteilige Wirkung, daß nämlich die Bürger vermehrt für andere Parteien stimmen, um eine Regierung, die durch einen hohen Wahlsieg zu selbstherrlich zu werden droht, durch eine stärkere Opposition besser zu kontrollieren. Dieser Gesichtspunkt könnte grundsätzlich ohne Schwierigkeiten zusätzlich berücksichtigt werden<sup>14</sup>, wenn auch wiederum der Simulationsansatz gewisse Vorteile bietet.

Im vorgeführten Modell wird den Bürgern weiter ein extrem vergebliches Verhalten unterstellt: für ihre Wahlentscheidung spielt ausschließlich der Konsum der gleichen Periode eine Rolle. Diese Annahme entspricht dem üblichen Vorgehen in der Theorie des optimalen Wachstums, in der der Nutzen vom Konsum der gleichen Periode abhängig gemacht wird. Die sogenannte *Stationarität* der Nutzenfunktion ist unrealistisch, da sie z. B. impliziert, daß der Nutzen eines Mittagessens unabhängig von Quantität und Qualität des Frühstücks ist. Eine Berücksichtigung zeitlicher Nutzeninterdependenz oder zeitlicher Konsumexternalitäten führt wiederum zu beträchtlichen formalen Schwierigkeiten<sup>15</sup>. Die enge Beziehung zu der oben diskutierten temporalen Abhängigkeit der Wiederwahlwahrscheinlichkeiten ist offensichtlich.

<sup>13</sup> Frey (1974), Schneider (1974).

<sup>14</sup> Formal würde ebenfalls die im vorangegangenen Absatz erwähnte Erweiterung der Wiederwahlfunktion benutzbar sein.

<sup>15</sup> Vgl. die Ansätze von Wan (1970), Samuelson (1971) und Iwai (1972). Im Falle der hier betrachteten politischen Entscheidungen ergäbe sich für die Wiederwahlfunktion der Periode  $n$ :  $p_n = \Phi_n(c)$  mit  $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$ .

Schließlich ist das Verhalten der Bürger in unserem Ansatz auch kurz-sichtig. Man könnte vielleicht eher erwarten, daß für die Wahlchance auch der einer Partei zugetraute Zukunftskurs eine Rolle spielt, nicht nur der gegenwärtige oder frühere Konsumstandard<sup>16</sup>.

Bei der Diskussion der Ergebnisse hat sich die große Bedeutung der Gestalt und Lage der Wiederwahlfunktion gezeigt. Auch in dieser Richtung ließe sich das Modell ausbauen. Man könnte zusätzliche Argumente in die Wiederwahlfunktion einführen, also neben dem Konsum z. B. Ausstattung mit Infrastruktur, Einkommensverteilung, Inflationsrate und Arbeitslosenquote. Natürlich würde dies im Einzelfall u. U. eine geeignete Modifizierung auch des ökonomischen Systems erforderlich machen. Sinnvoller wäre allerdings, die  $\Phi$ -Funktion durch ein System von strukturellen Gleichungen des politischen Sektors zu erklären. Eine Regierung steht z. B. vor der Entscheidung, eine Erhöhung und Sicherung der Wiederwahlchance entweder durch Konsumkonzessionen oder durch verstärktes Angebot öffentlicher Güter oder gar durch Intensivierung unmittelbarer Einflußmöglichkeiten (z. B. Kontrolle der Massenmedien) zu erreichen; hier stellt sich in jedem Falle ein spezifisches Allokationsproblem im politischen Bereich. Beiläufiges Ergebnis einer solchen erweiterten Analyse wäre u. a. eine neue Antwort auf die alte Streitfrage der Über- oder Unterversorgung einer Gesellschaft mit öffentlichen Gütern.

Schließlich sei darauf aufmerksam gemacht, daß die Grundidee des hier vorgeführten Ansatzes auf eine Reihe anderer ökonomischer Probleme anwendbar ist. Im Rahmen einzelwirtschaftlicher Betrachtung etwa wäre — ohne auf relativ willkürliche Annahmen über diskretionäre Zielsetzungen zurückgreifen zu müssen — eine einfache Antwort auf die Frage möglich, in welcher Weise sich die Investitionspolitik zwischen von Eigentümern und von „gewählten“ Managern geleiteten Unternehmungen unterscheidet. Bei gewissen Modifikationen scheint darüber hinaus eine Abschätzung der Wirkungen verschiedener Mitbestimmungsmodelle denkbar.

### Zusammenfassung

Die Arbeit will in erster Linie einen Beitrag zur positiven Theorie der gesellschaftlichen Diskontrate leisten. Die Diskontrate wird als Ergebnis des Zusammenspiels von wirtschaftlichem und politischem System erklärt. Zugrundegelegt wird eine stets vollbeschäftigte Wirtschaft, deren Regierung aus einem demokratischen Wahlprozeß hervorgeht. Ziel der Regierung ist, möglichst lange im Amt zu bleiben, wobei ihre Wiederwahlchance vom Konsum-

<sup>16</sup> Vgl. Downs (1957).



standard der Bevölkerung bestimmt ist. Unter der Annahme vollständiger Kontrolle über die Investitionsquote wird dann das aus der Sicht der Regierung optimale Zeitprofil des Konsums ermittelt. Der Vergleich mit der Theorie des optimalen Wachstums erlaubt verschiedene Rückschlüsse auf Ausmaß und zeitliche Veränderung der endogenen Diskontrate.

### Summary

A positive theory of the social rate of discount which depends on the interaction of the economic and political system is presented. A fully employed economy with a democratically elected government is assumed. The government's goal is to stay in power as long as possible. Its reelection probability depends on the consumption standard of the population. The time path optimal from the point of view of the government is derived. A comparison with the theory of optimal growth allows to deduce various consequences with respect to the size and time variation of the endogenous rate of discount.

### Literatur

- Chakravarty, Sukhamoy*, (1967), Alternative Preference Functions in Problems of Investment Planning on the National Level, In: *E. Malinvaud* and *M. O. L. Bacharach*, eds., *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning*. New York: St. Martin's Press, 1967.
- Downs, Anthony*, (1957), *An Economic Theory of Democracy*. New York: Harper and Row, 1957.
- Eckstein, Otto*, (1961), A Survey of the Theory of Public Expenditure Criteria. In: *Public Finances, Needs, Sources and Utilization*. Princeton Univ. Press 1961, pp. 439 - 494. Reprinted in: *R. W. Houghton*, ed., *Public Finance*. Penguin: Harmondsworth 1970, pp. 261 - 276.
- Frey, Bruno S.*, (1974), The Politico-Economic System: A Simulation Approach. *Kyklos*, Vol. 27 (1974).
- Frey, Bruno S.*, und *Garbers, Hermann*, (1972), Der Einfluß wirtschaftlicher Variabler auf die Popularität der Regierung — eine empirische Analyse. *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Bd. 186 (1972), S. 281 - 295.
- Goodhart, C. A. E.*, and *Bhansali, R. I.*, (1970), Political Economy. *Political Studies*, Vol. 18 (1970), pp. 43 - 106.
- Intriligator, Michael D.*, (1971), *Mathematical Optimization and Economic Theory*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1971.
- Iwai, Katsuhito*, (1972), Optimal Economic Growth and Stationary Ordinal Utility — A Fisherian Approach. *Journal of Economic Theory*, Vol. 5 (1972), pp. 121 - 151.
- Kramer, Gerald H.*, (1971), Short-Term Fluctuations in U. S. Voting-Behaviour. *American Political Science Review*, Vol. 65 (1971), pp. 131 - 143.
- Meira, Koichi*, (1968), An Empirical Determination of a Dynamic Utility Function, *Review of Economics and Statistics*, Vol. 50 (1968), pp. 117.
- Nordhaus, William D.*, (1972), The Political Business Cycle. *Cowles Foundation Discussion Papers*, No. 333, April 4, 1972.

- Samuelson, Paul A.*, (1971), Turnpike Theorems Even Though Tastes are Intertemporally Dependent. *Western Economic Journal*, Vol. 9 (1971), pp. 21 - 25.
- Schneider, Friedrich*, (1974), Politisch-ökonomische Zyklen: Ein Simulationsmodell. Erscheint in: *Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik*, 110 Jg. (1974).
- Sen, Amartya K.*, (1961), On Optimizing the Rate of Saving. *Economic Journal*, Vol. 71 (1961), pp. 479 - 495.
- Stigler, George J.*, (1973), General Economic Conditions and National Elections. *American Economic Review, Papers and Proceedings*, Vol. 63 (1973), pp. 160 - 167.
- Strotz, R.*, (1955-6), Myopia and inconsistency in dynamic utility maximization. *Review of Economic Studies*, Vol. 23 (1955-6), pp. 165 - 180.
- Wan, Henry Y.*, (1970), Optimal Saving Programs under Intertemporally Dependent Preferences. *International Economic Review*, Vol. 11 (1970), pp. 521 bis 547.