Eine einfache Einführung zu Pontryagins Maximum-Prinzip im Wirtschaftswachstum

Von

Bruno S. Frey

Inhalt: I. Einleitung. — II. Das Wachstumsmodell. — III. Die Nutzenfunktion. — IV. Das System und das Maximum-Prinzip. — V. Das nichtautonome System. — VI. Das autonome System. — VII. Interpretation und Vergleich mit der Goldenen Regel.

I. Einleitung

1. Vereinfachend lassen sich vier Entwicklungsstufen der Theorie des optimalen Wachstums unterscheiden. Als erste der geniale Vorläufer Frank Ramsey[1]. Dann die zweite Periode der seltsamen Ergebnisse im Stile von Jan Tinbergen[2]. Die dritte Stufe begann um 1961/62 mit der wie eine Sensation wirkenden Goldenen Regel der Kapitalakkumulation, die gleichzeitig von etwa einem Dutzend Wissenschaftlern in ebensovielen Ländern unabhängig voneinander »entdeckt« wurde[3]. Die vierte Stufe schließlich ist durch die Verwendung des Maximum-Prinzips des russischen Mathematikers L. S. Pontryagin und seiner Mitarbeiter[4] gekennzeichnet.

Anmerkung: Ich bin Herrn Prof. Gottfried Bombach und lic. rer. pol. Hermann Garbers für Verbesserungsvorschläge dankbar.

[1] F. P. Ramsey, A Mathematical Theory of Saving. »The Economic Journal«, London, Vol. 38 (1928), S. 543ff.

[2] J. Tinbergen, The Optimum Rate of Saving. Ebenda, Vol. 66 (1956), S. 603ff. — Derselbe, Optimum Savings and Utility Maximization over Time. »Econometrica«, New Haven, Conn., Vol. 28 (1960), S. 481ff.

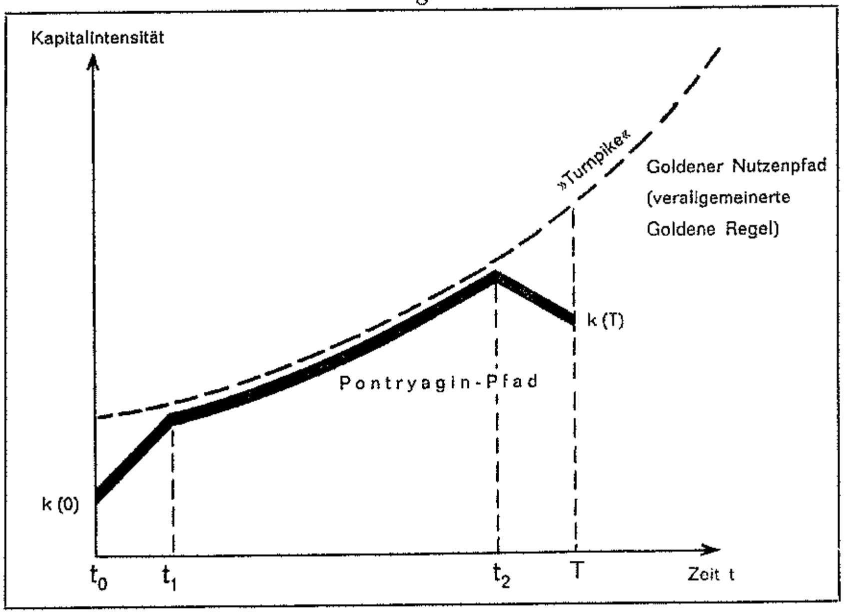
[3] Einen Überblick und verschiedene Anwendungen finden sich bei E. S. Phelps, Golden Rules of Economic Growth. Studies of Efficient and Optimal Investment. New York 1966.

[4] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes. New York 1962. — Deutsche Übers.: Mathematische Theorie optimaler Prozesse. Übers. besorgt von W. Hahn und R. Herschel. München u. Wien 1964.

Auf dieser Stufe findet sich diese Hauptlinie der Forschung über die Idee des »Turnpike«[1] auch wieder mit der Schöpfung eines anderen genialen Vorläufers zusammen: dem von Neumann-Modell[2]. Die Turnpike-Modelle beschäftigen sich mit dem Problem, wie (bei gegebenem Ausgangspunkt) eine bestimmte Güterkollektion in einem bestimmten Zeitpunkt in der Zukunft am schnellsten erreichbar ist. Es läßt sich beweisen, daß es optimal ist, zuerst einen Umweg zum gleichgewichtigen von Neumann-Pfad zu machen, dann den größten Teil der Zeit in seiner unmittelbaren Nähe zu bleiben und erst kurz vor Ablauf der Planungsperiode wieder davon abzuweichen, um das gewünschte Güterbündel zu erreichen. Dieser Umweg lohnt sich, weil auf dem von Neumann-Pfad das schnellste Wachstum erreicht wird.

Das Maximum-Prinzip erlaubt es, einen optimalen Wachstumspfad zu ermitteln, wenn eine Nutzenfunktion über eine vorgegebene Zeitperiode

Schaubild 1 — Der Pontryagin-Pfad und die Goldene Nutzenregel



[1] Zuerst diskutiert bei R. Dorfman, P. A. Samuelson and R. M. Solow, Linear Programming and Economic Analysis. (The Rand Series.) New York, Toronto and London 1958. Chap. 12.

[2] J. von Neumann, Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes. In: Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums. Wien 1937.

maximiert werden soll und (neben dem Ausgangspunkt) auch der Kapitalstock des Endzeitpunktes vorgegeben ist. Auch hier läßt sich zeigen[1], daß es optimal ist, einen Umweg einzuschlagen. Der »Turnpike« ist aber bei einer Nutzenmaximierung nicht der von Neumann-Pfad, sondern die (verallgemeinerte) Goldene Regel, auch »Goldener Nutzenpfad« genannt. Der Zusammenhang zwischen dem optimalen Wachstumsprogramm (»Pontryagin-Pfad« genannt) und dem Goldenen Nutzenpfad läßt sich graphisch zeigen (Schaubild 1).

Der Pontryagin-Pfad erfordert zwischen dem Ausgangspunkt t_0 und t_1 eine schnellere Kapitalakkumulation (d.h. eine höhere Sparquote), um auf das Niveau der Goldenen Nutzenregel zu gelangen. Zwischen t_1 und t_2 folgt das optimale Programm diesem Pfad, von dem ja bekannt ist, daß er bei gleichgewichtigem Wachstum ein Nutzenmaximum stiftet. Zwischen t_2 und dem Zeithorizont T findet eine Umstrukturierung (durch Verkleinerung der Sparquote) statt, um die gewünschte Kapitalintensität $k(T)$ zu erreichen.

Zur besseren Übersicht können die verschiedenen Ansätze der Theorie optimalen Wachstums schematisch gemäß ihren Annahmen hinsichtlich der Nutzenfunktion und dem Planungshorizont klassifiziert werden (Tabelle 1).

Tabelle 1 — Annahmen hinsichtlich Nutzenfunktion und Zeithorizont in Modellen optimalen Wachstums

		Zeithorizont	
		endlich	unendlich
Nutzenfunktion	keine explizite Verwendung	Turnpike	Goldene Regel von Neumann-Modell
	explizite Verwendung	Ramsey Pontryagin-Pfad	Tinbergen Goldener Nutzen (verallgemeinerte Goldene Regel)

2. Das Maximum-Prinzip von Pontryagin ist für die Ökonomie vor allem darum wichtig, weil es die in der Wachstumstheorie vorkommenden Probleme auf einfache und intuitiv verständliche Weise anzugehen erlaubt. Damit soll nicht gesagt werden, daß diese Methode vom mathematischen Standpunkt aus gesehen einfach sei. Sie ist auch nicht unumgänglich: die überwiegende Zahl von Problemen ließe sich auch durch die klassische Variationsrechnung (Euler-Lagrange-Gleichung) lösen. Der Unterschied

[1] Vgl. dazu die Aufsatzsammlung: Essays on the Theory of Optimal Economic Growth. Ed. by K. Shell. Cambridge, Mass., and London 1967.

besteht darin, daß sich das Maximum-Prinzip ökonomisch sinnvoll interpretieren läßt, während dies für die Euler-Lagrange-Gleichung nicht zutrifft.

Gerade weil in der Wirtschaftstheorie die Ansätze immer komplizierter werden und damit die ökonomische Komponente gegenüber der Mathematik immer mehr in den Hintergrund gedrängt wird, sollte jede Gelegenheit benutzt werden, Methoden zu verwenden, denen auch ein ökonomischer Gehalt gegeben werden kann.

Dieser Aufsatz will nicht auf den mathematischen Aspekt der Pontryagin-Methode eingehen, sondern konzentriert sich auf die wirtschaftstheoretische Anwendung.

Die Darstellung ist nicht rigoros, sondern betont vor allem die intuitive Verständlichkeit des Ansatzes[1]. Auf eigene Erweiterungen wird verzichtet. Das Maximum-Prinzip wird hier nur zur Lösung des Optimumproblems in einer im Gleichgewicht wachsenden Wirtschaft verwendet. Das Ziel besteht also in der Ableitung der Goldenen Nutzenregel. Der Unterschied zur Goldenen Regel besteht darin, daß explizit eine Nutzenfunktion maximiert wird (vgl. Tabelle 1) und dadurch auch eine Berücksichtigung der Zeitdiskontierung möglich wird. Die Ermittlung des »Pontryagin-Pfades« ist bedeutend komplizierter, weil das Wachstum dann nicht mehr dauernd gleichgewichtig ist.

II. Das Wachstumsmodell

3. Das formale Problem besteht in der Maximierung des Nutzenstromes über eine unendliche Periode in einer Volkswirtschaft, deren technologische Beziehungen bekannt sind. Wie bereits erwähnt, werden nur Gleichgewichtssituationen betrachtet (Goldenes Zeitalter oder »Steady State«).

Das Wachstum der Wirtschaft sei durch ein neoklassisches Modell wiedergegeben[2]. Die Beziehung zwischen Sozialprodukt Y, dem Realkapital K und dem Arbeitseinsatz L wird durch eine Produktionsfunktion beschrieben. Der technische Fortschritt T ist Harrod-neutral

$$Y(t) = F[K(t), L(t)\,T(t)] \qquad (1a)$$

[1] Wertvolle Anregungen wurden vor allem gewonnen aus K. J. Arrow, Applications of Control Theory to Economic Growth. Institute for Mathematical Studies in the Social Science, Stanford University (July 1967). Arrow verwendet jedoch andere Instrumentenvariable.

[2] Vgl. dazu G. Bombach, Art. Wirtschaftswachstum. Handwörterbuch der Sozialwissenschaften, Stuttgart, Tübingen u. Göttingen, Bd. 12 (1965), S. 763ff. — W. Vogt, Theorie des wirtschaftlichen Wachstums. (Vahlens Handbücher der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften.) Berlin u. Frankfurt a. M. 1968.

Die Annahme der linearen Homogenität erlaubt die Umformung

$$\frac{Y(t)}{L(t)\,T(t)} = F\left[\frac{K(t)}{L(t)\,T(t)}, 1\right] \equiv f\left[\frac{K(t)}{L(t)\,T(t)}\right];\ f' > 0,\ f'' < 0 \qquad (1b)$$

Der Arbeitseinsatz wachse mit der Rate λ, und auch der technische Fortschritt sei exogen vorgegeben und wachse mit der Rate τ

$$L(t) = L_0\, e^{\lambda t}; \quad \lambda \geqslant 0 \qquad (2)$$

$$T(t) = T_0\, e^{\tau t}; \quad \tau \geqslant 0 \qquad (3)$$

Ein konstanter Anteil $(1 - s)$ der Produktion wird für den Konsum verwendet

$$C(t) = (1-s)\, Y(t); \quad 0 < s < 1 \qquad (4)$$

Die Bruttoinvestition I dient zur Vermehrung des Realkapitalstocks $\dot{K} = dK/dt$ und der Ersatzinvestitionen. Der Kapitalverzehr sei ein konstanter Anteil δ des Kapitals

$$I(t) = \dot{K}(t) + \delta K(t); \quad \delta \geqslant 0. \qquad (5)$$

(Im folgenden wird auf die expliziten Zeitindizes verzichtet.) Zur Vereinfachung werden neue Symbole für die »normierten« Variablen eingeführt. Sie werden nicht mehr als absolute Größen behandelt, sondern immer im Verhältnis zum Arbeitseinsatz in Effizienzeinheiten gemessen:

$$y \equiv Y/LT; \quad k \equiv K/LT; \quad c \equiv C/LT$$

Alle diese Quoten sind im Wachstumsgleichgewicht konstant.

Aus (1b) bis (5) läßt sich die grundlegende Differentialgleichung zwischen $\dot{k} = dk/dt$ und k ableiten

$$\dot{k} = s\, f(k) - (g + \delta)\, k. \qquad (6)$$

Sie wird als Übergangsgleichung (transition equation) bezeichnet, da sie die Veränderung der Variablen von einem Zeitpunkt zum anderen beschreibt[1]. g ist die »natürliche« Wachstumsrate bei $\dot{k} = 0$

$$g = \lambda + \tau. \qquad (7)$$

Für den Konsum je erweiterte Arbeitskraft ergibt sich im Gleichgewicht

$$c = (1-s)\, f(k) = f(k) - (g + \delta)\, k. \qquad (8)$$

[1] $sf(k) - (g + \delta)k$ ist konkav, was eine hinreichende Bedingung für die Existenz der nachfolgenden Maximierung ist.

III. Die Nutzenfunktion

4. In der Theorie des optimalen Wachstums werden verschiedene Nutzenbegriffe zugrunde gelegt[1], denen verschiedene ethische Anschauungen entsprechen. Häufig wird der Nutzen des Prokopfkonsums oder die Summe des Nutzens des Prokopfkonsums aller Individuen zusammen maximiert. Hier wird das letzte Konzept benutzt mit der Überlegung, daß für die Volkswirtschaft als Ganzes der gesamte gestiftete Nutzen zugrunde gelegt werden sollte und nicht nur der individuelle Nutzen. Der Bevölkerungszahl wird im verwendeten Nutzenbegriff eine unabhängige Rolle zugedacht.

Die Nutzenfunktion u jeder Person wird also als abhängig vom Prokopfkonsum betrachtet

$$u = u\,(C/L); \quad u' > 0 \quad u'' < 0. \tag{9}$$

C/L wächst mit der Rate des technischen Fortschritts

$$\frac{C\,(t)}{L\,(t)} \equiv \frac{C}{LT} \cdot T\,(t) = c \cdot T\,(t) = c\,T_0\,e^{\tau t}. \tag{10}$$

Zur Vereinfachung wird angenommen, daß jedes Individuum die gleiche Nutzenfunktion besitze und daß der Konsum zu jedem Zeitpunkt gleichmäßig verteilt wird. Die Summe aller Nutzen ist dann $L \cdot u(C/L)$. Das Ziel der Volkswirtschaft ist die Maximierung dieses Gesamtnutzens über die Zukunft (die als unbegrenzt angenommen wird)

$$U = \int_{t=0}^{t=\infty} e^{-\rho t}\,L\,(t)\,u\left[\frac{C\,(t)}{L\,(t)}\right] dt. \tag{11}$$

Der N u t z e n s t r o m j e K o p f a l l e r I n d i v i d u e n z u s a m m e n wird dabei mit der Rate ρ abgezinst. Diese Formulierung kann aber auch anders interpretiert werden[2]. Da L(t) mit der Rate λ wächst, gilt auch

$$U = \int_0^\infty e^{-\rho t}\,e^{\lambda t}\,u\,dt = \int_0^\infty e^{-(\rho-\lambda)\,t}\,u\,dt = \int_0^\infty e^{-\bar{\rho}}\,u\,dt. \tag{12}$$

[1] Vgl. z. B. T. C. Koopmans, Objectives, Constraints, and Outcomes in Optimal Growth Models. »Econometrica«, Vol. 35 (1967), S. 1 ff.

[2] Vgl. Derselbe, On the Concept of Optimal Economic Growth. In: Semaine d'étude sur le rôle de l'analyse économetrique dans la formulation de plans de développement. Pontificia Academia Scientiarum, Città del Vaticano, 7—13 octobre 1963. (Pontificiae Academiae Scientiarum Scripta Varia, 28.) Amsterdam et Chicago 1965. S. 225 ff. — Phelps, a. a. O., S. 83 f.

Es zeigt sich somit, daß (11) unter den gemachten Annahmen gleichbedeutend ist mit einer Abzinsung des Nutzens des Prokopfkonsums mit der Rate $\bar{\rho}$, wobei definitionsgemäß

$$\bar{\rho} \equiv \rho - \lambda. \tag{13}$$

In der folgenden Ableitung wird Interpretation (11) und damit der Abzinsungsfaktor ρ verwendet.

IV. Das System und das Maximum-Prinzip

5. Das Optimumproblem besteht in der Maximierung von (11) unter Berücksichtigung der durch die Wirtschaft gegebenen Möglichkeiten (1) bis (8). Als Instrumentalvariable diene die Investitionsquote s. Sie bestimmt die Aufteilung der Produktion zwischen laufendem Konsum und Kapitalbildung. Die zentrale Variable des Systems ist der normierte Kapitalstock k, durch dessen Größe alle anderen Variablen (z. B. y) bestimmt werden. Eine solche Variable wird als Zustandsvariable (state variable) bezeichnet. Wie aus der Übergangsgleichung (6) ersichtlich ist, hängt der Zeitablauf des Systems (abgesehen von Parametern) ausschließlich von der Zustandsvariablen k und der Instrumentalvariablen s ab. Aus (11) sieht man, daß der zu maximierende Ausdruck U ebenfalls nur durch diese beiden Größen bestimmt wird.

6. Pontryagin hat gezeigt, daß das Optimumproblem durch die Einführung der zeitabhängigen Hilfsvariablen p(t) gelöst werden kann. Es genügt, den nachfolgenden zusammengesetzten Ausdruck H (nach Hamilton) in bezug auf die Instrumentalvariable zu maximieren

$$H = L \cdot u + p \cdot \dot{k} \tag{14}$$

Die Hilfsvariable p muß dabei die Differentialgleichung

$$\dot{p} = \rho\, p - (\partial H/\partial k) \tag{15}$$

erfüllen.

Diese beiden Gleichungen lassen sich ökonomisch interpretieren: Der Hamiltonsche Ausdruck H setzt sich zusammen aus dem laufenden Nutzenstrom des Gegenwartskonsums (Lu) und aus dem durch Investitionen bewirkten zukünftigen Nutzenstrom ($p\dot{k}$). Die (normierten) Investitionen $\dot{k}$ werden durch die Hilfsvariable p gewichtet. Diese gibt an, welcher marginale Nutzenzuwachs durch Investitionen in einem bestimmten Zeitpunkt erwartet werden kann. p ist somit ein »Preis«. Wird in Gleichung (15) zur Vereinfachung $\rho = 0$ gesetzt, gilt

$$\dot{p} = -\,\partial H/\partial k \tag{15a}$$

Es handelt sich dabei um eine Gleichgewichtsbedingung[1]. Der Grenznutzen (oder die Grenzproduktivität) der Zustandsvariablen muß durch eine Preisänderung gerade kompensiert werden, so daß durch eine Veränderung von k kein »Gewinn« möglich ist.

Der Ausdruck ρp in (15) gibt wieder, wie stark der zukünftige gegenüber dem gegenwärtigen Nutzen diskontiert wird, wobei mit dem Preis gewichtet wird. ρp läßt sich auch als Zinssatz interpretieren, weil er den Nutzengewinn beschreibt, den eine Vorverschiebung des Konsums bewirkt. Ein Mehreinsatz der Zustandsvariablen k mit dem Grenznutzen $\partial H/\partial k$ ist nur rational, wenn durch eine gleichzeitige Preiserhöhung (Höhergewichtung) der Investitionen dieser Zinssatz erreicht wird. Wenn ein Mehreinsatz des Kapitalstocks plus Preissteigerung kleiner ist als der Nutzenzuwachs aus der Vorverschiebung des Konsums, ist kein Gleichgewicht erreicht: es lohnt sich, den Kapitalstock zu reduzieren. Die Parallelität zur üblichen Investitionstheorie ist offensichtlich.

V. Das nicht-autonome System

7. Die optimale Politik kann durch Maximierung des Hamiltonschen Ausdrucks unter Berücksichtigung der Hilfsgleichung (15) bestimmt werden.

(14) wird durch Einführung von (6)—(10) zu

$$H = L(t) \cdot u\{(1-s)\, f(k) \cdot T(t)\} + p(t) \cdot [sf(k) - (g + \delta)\, k]. \tag{16}$$

Differenziert nach s und Auflösung ergibt

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -L(t) \cdot u'\{c\, T(t)\} \cdot f(k) \cdot T(t) + p(t)\, f(k) = 0$$

$$u'\{c \cdot T(t)\} = \frac{p(t)}{L(t)\, T(t)}. \tag{17}$$

Differenzierung von (16) nach k ergibt

$$\frac{\partial H}{\partial k} = L(t)\, u'\{cT(t)\} \cdot (1-s)\, f'(k)\, T(t) + p(t)\, s\, f'(k) - (g+\delta)\, p(t).$$

Unter Berücksichtigung von (17) wird daraus

$$\frac{\partial H}{\partial k} = p \cdot [f'(k) - \delta - g]. \tag{18}$$

[1] Vgl. Arrow, a. a. O.

Die Hilfsgleichung (15) ist nun

$$\dot{p} = p\,\rho - \frac{\partial H}{\partial k} = p \cdot [\rho - f'(k) + \delta + g],$$

$$\frac{\dot{p}}{p} = \rho - f'(k) + \delta + g\,. \tag{19}$$

8. Die Variablen in den Ergebnissen (17) und (19) sind nicht in einem Gleichgewichtszustand, da sie sich über die Zeit verändern: das Ergebnis ist nicht autonom. In Gleichung (17) ist die linke Seite über das Argument des Grenznutzens zeitabhängig, auf der rechten Seite hängen alle drei Größen von der Zeit ab. In Gleichung (19) ist die linke Seite offensichtlich eine Funktion der Zeit. Es gilt nun, diese beiden Gleichungen derartig umzuformen, daß die geeignet definierten neuen Variablen zeitunabhängig werden. Die Lösungen sind dann autonom und beschreiben ein Gleichgewicht.

VI. Das autonome System

9. Die Grenznutzenfunktion $u'\{c\,T(t)\}$ muß spezielle Bedingungen erfüllen, damit (17) und (19) autonom formuliert werden können. Die Grenznutzenfunktion muß einen bestimmten Homogenitätsgrad aufweisen. Der Homogenitätsfaktor sei $-\alpha$ $(\alpha > 0)$ und der (beliebige) Skalenfaktor l. Dann gilt

$$u'\{c \cdot T(t) \cdot l\} = l^{-\alpha}\, u'\{c\,T(t)\}\,. \tag{20}$$

Für $l = 1/T(t)$

$$u'(c) = \left[\frac{1}{T(t)}\right]^{-\alpha} u'\{c\,T(t)\}\,. \tag{21}$$

Der Grenznutzen ist nun zeitunabhängig, da $c \equiv C(t)/L(t)\,T(t)$. Aus (17) und (21) ergibt sich dann

$$u'(c) = \left[\frac{1}{T(t)}\right]^{-\alpha} \frac{p(t)}{L(t)\,T(t)} \tag{22}$$

Definiere

$$\hat{p}(t) \equiv \left[\frac{1}{T(t)}\right]^{-\alpha} \frac{p(t)}{L(t)\,T(t)}, \tag{23}$$

so daß nun

$$u'(c) = \hat{p}(t)\,. \tag{24}$$

Die neue Hilfsvariable $\hat{p}$ ist immer noch zeitabhängig. Durch logarithmische Differenzierung wird aus (23)

$$\frac{\dot{\hat{p}}}{\hat{p}} = \alpha \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} + \frac{\dot{p}}{p} - \left[\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} + \frac{\dot{T}(t)}{T(t)}\right]. \tag{25}$$

Dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen durch Berücksichtigung von (2), (3), (7) und (19)

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\hat{p}}}{\hat{p}} &= \alpha\tau + \rho - f'(k) + \delta + g - g \\ &= \rho + \alpha\tau - f'(k) + \delta . \end{aligned} \tag{26}$$

Eine autonome Lösung ergibt sich durch $\dot{\hat{p}}/\hat{p} = 0$. Die Wachstumspolitik ist optimal, wenn

$$f'(k^*) - \delta = \rho + \alpha\tau . \tag{27}$$

k^* bezeichnet die optimale Kapitalintensität.

10. $f'(k)$ ist die Brutto-Grenzproduktivität des Kapitals und $f'(k) - \delta$ daher die Netto-Grenzproduktivität. Bei vollkommener Konkurrenz entspricht sie dem Zinssatz r. ρ ist der Diskontsatz, mit dem der Nutzenstrom der Individuen abgezinst wird. Nach (13) ist dieser Diskontsatz um $\dot{L}(t)/L(t) = \lambda$ größer als der üblicherweise auf den Nutzen des Prokopfkonsums angewendete Diskontsatz $\bar{\rho}$. (27) läßt sich daher auch schreiben

$$r^* = f'(k^*) - \delta = \bar{\rho} + \lambda + \alpha\tau . \tag{28}$$

Der optimale Zinssatz ist abhängig vom Diskontsatz, den Wachstumsraten der Arbeit und des Kapitals und vom Grenznutzen des Prokopfkonsums. Gleichung (28) bestimmt neben dem optimalen Zinssatz gleichzeitig auch die optimale Kapitalintensität k^*.

VII. Interpretation und Vergleich mit der Goldenen Regel

11. Bei stationärer Technik (d. h. $\tau = 0$) besagt (28), daß ein Nutzenmaximum erreicht wird, wenn der Zinssatz gleich der Wachstumsrate der Wirtschaft $g = \lambda$ plus dem Diskontfaktor $\bar{\rho}$ ist.

Aus (8) ist anderseits ersichtlich, daß der Prokopfkonsum maximiert wird, wenn

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dk} &= f'(k) - (g + \delta) = 0 , \\ \hat{r} &= f'(\hat{k}) - \delta = g \end{aligned} \tag{29}$$

Diese Bedingung ist als Goldene Regel der Kapitalakkumulation bekannt: Die Kapitalintensität $\hat{k}$ muß einen derartigen Wert annehmen, daß die Nettoprofitrate (Zinssatz $\hat{r}$) gleich der Wachstumsrate der Wirtschaft ist. Durch Multiplikation von (29) mit dem Kapitalkoeffizienten $k/y = K/Y$ ergibt sich auch

$$\frac{rK}{Y} = \frac{gK}{Y} = \frac{\dot{K}}{Y} = \frac{I - \delta K}{Y} = s \tag{30}$$

d. h. die Profitquote muß gleich der Nettoinvestitionsquote sein.

Ein Vergleich von (28) und (29) zeigt, daß die Goldene Regel nur optimal ist, wenn der Nutzen des Prokopfkonsums nicht abgezinst wird. Die Herleitung mit Hilfe einer expliziten Nutzenfunktion (und die Benutzung des Maximum-Prinzips) zeigt somit, daß die Goldene Regel ein Spezialfall ist. Die Bedingung (28) kann umgekehrt als »Verallgemeinerte Goldene Regel«[1] oder als »Goldene Nutzenregel«[2] bezeichnet werden:

$$\text{Goldene Nutzenregel} \quad r^* = \lambda + \bar{\rho} \tag{28a}$$

$$\text{Goldene Regel} \quad \hat{r} = \lambda \tag{29a}$$

Der optimale Zinssatz muß höher sein als die Wachstumsrate, wenn die Zukunft diskontiert wird ($\bar{\rho} > 0$), d. h. wenn zukünftiger Nutzen nur darum weniger hoch eingeschätzt wird, weil er noch nicht heute zur Verfügung steht. Dies kann graphisch veranschaulicht werden (Schaubild 2).

Der höhere Zinssatz, den die Goldene Nutzenregel fordert, bewirkt, wegen $f''(k) < 0$, daß die Kapitalintensität kleiner ist ($k^* < \hat{k}$). Aus dem Schaubild ist auch ersichtlich, daß bei Zeitdiskontierung die optimale Sparquote kleiner sein muß ($s^* < \hat{s}$). Dieses Ergebnis ist intuitiv einleuchtend: wenn der zukünftige gegenüber dem gegenwärtigen Konsum minder eingeschätzt wird, so muß weniger investiert werden, als wenn keine Zeitpräferenz besteht.

12. Wenn technischer Fortschritt vorhanden ist ($\tau > 0$), so ist der optimale Zinssatz durch einen zusätzlichen Faktor $\alpha\tau$ von der Goldenen Regel verschieden.

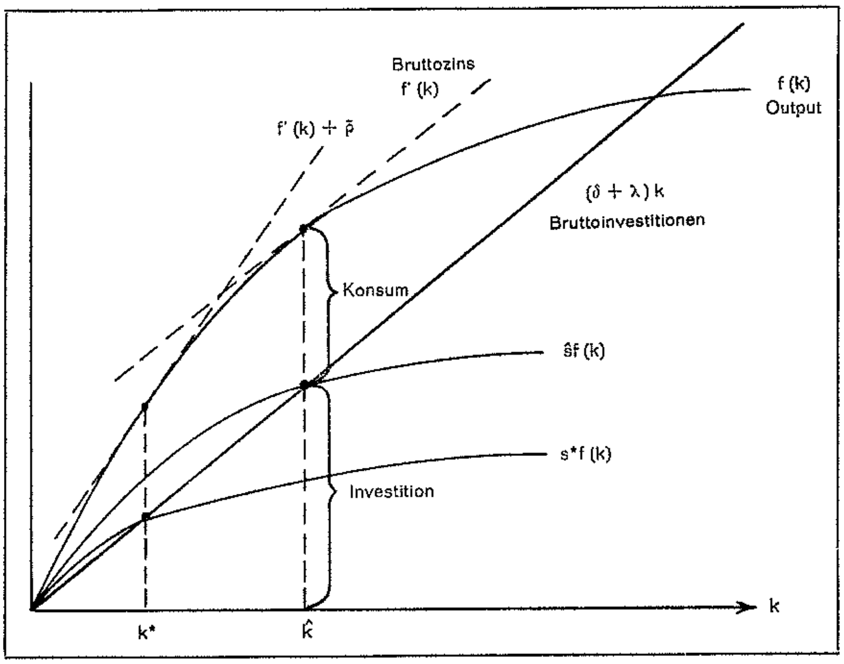
$$\text{Goldene Nutzenregel} \quad r^* = \alpha\tau + \lambda + \bar{\rho} \tag{28}$$

$$\text{Goldene Regel} \quad \hat{r} = \tau + \lambda \quad . \tag{29}$$

[1] Shell verwendet den Ausdruck »modified Golden Rule«. K. Shell, Optimal Programs of Capital Accumulation for an Economy in which there is Exogenous Technical Change. In: Essays on the Theory of Optimal Economic Growth, a. a. O., S. 6.

[2] Nach M. Inagaki, The Golden Utility Path. Memorandum, Netherlands Economic Institute. Rotterdam (November 1963). — Phelps benutzt (a. a. O., S. 92ff.) zur Herleitung dieses Ergebnisses ebenfalls die kompliziertere Euler-Lagrange-Gleichung.

Schaubild 2 — Optimale Kapitalintensität und Sparquote bei der Goldenen Regel ($\hat{k}$, $\hat{s}$) und bei der Goldenen Nutzenregel (k^*, s^*) bei Absenz von technischem Fortschritt



Im Gegensatz zum Optimum bei stationärer Technik spielt nun die Form der Nutzenfunktion eine Rolle: Die optimale Wachstumspolitik ist je nach Homogenitätsgrad α oder — was das gleiche ist — je nach (konstanter) Elastizität des Grenznutzens ε verschieden. Diese Elastizität ist definiert als

$$\varepsilon = \frac{u''(c) \cdot c}{u'(c)} \leq 0 . \tag{31}$$

In der daraus abgeleiteten Grenznutzenfunktion

$$u'(c) = bc^{\varepsilon}; \; (b > 0) \tag{32}$$

ist die konstante Elastizität (absolut) gleich dem Homogenitätsgrad: $\varepsilon = -\alpha$. Aus (32) lassen sich durch Integration je nach der Größe der Elastizität des Grenznutzens verschiedene Nutzenfunktionen ableiten

$$u(c) = \begin{cases} b\,c & \text{für } \alpha = 0 \quad (33a) \\ \dfrac{b}{1-\alpha} c^{1-\alpha} + B, & \text{für } 0 < \alpha < 1 \quad (33b) \\ \log c & \text{für } \alpha = 1 \quad (33c) \\ \dfrac{b}{1-\alpha} c^{1-\alpha} + B, & \text{für } \alpha > 1 \quad (33d) \end{cases}$$

In (33b) ist dabei $B = u(0)$, d. h. die Nutzenfunktion ist von unten durch B begrenzt, aber nach oben unbegrenzt. In (33d) ist $B = \bar{u}$ und die Nutzenfunktion ist oben begrenzt: $u(c)$ nähert sich bei steigendem Prokopfkonsum assymptotisch $\bar{u}$. Es wird also in diesem Fall wie bei Ramsey angenommen, daß der Nutzen nicht ins Unendliche steigen kann, sondern daß ein Nutzenmaximum (»bliss«) besteht.

James Mirrlees und Edmund Phelps[1] haben bewiesen, daß eine optimale Wachstumspolitik nur existiert, wenn

$$\bar{\rho} + \alpha\tau \geqslant \tau. \tag{34}$$

Es handelt sich hier um das (schon bei Ramsey diskutierte) Problem der Konvergenz des Nutzenintegrals. Wenn der zukünftige Nutzen nicht genügend diskontiert wird, ist dieses Nutzenintegral nicht endlich, und es läßt sich keine optimale Politik ableiten. Es wird im folgenden angenommen, daß diese Beziehung erfüllt ist.

Aus (34) ist ersichtlich, daß die Elastizität des Grenznutzens $\varepsilon = -\alpha$ ähnlich wie eine Zeitdiskontierung interpretiert werden kann: der im Wirtschaftswachstum in der Zukunft dauernd steigende Prokopfkonsum ist wegen des fallenden Grenznutzens immer weniger »wert«.

Vereinigung der Gleichungen (28), (29) und (34) zeigt, daß — falls eine optimale Politik überhaupt existiert — der Zinssatz nicht tiefer und damit die optimale Sparquote nicht höher sein kann als bei der Goldenen Regel:

$$r^* = \lambda + \bar{\rho} + \alpha\tau \geqslant \dot{r} = \lambda + \tau \tag{35}$$

Die Gleichheitszeichen in der Nebenbedingung (34) ergeben also, daß die Goldene Nutzenregel mit der Goldenen Regel zusammenfällt. Bei Un-

[1] J. A. Mirrlees, Optimum Growth when Technology is Changing. »The Review of Economic Studies«, Edinburgh and London, Vol. 34 (1967), S. 95ff. — E. S. Phelps, The Ramsey Problem and the Golden Rule of Accumulation. In: Golden Rules of Economic Growth, a. a. O., S. 69ff.

gleichheit ist immer $s^* < \hat{s}$. Aus Schaubild 2 folgt auch graphisch, daß wegen $r^* \geqslant \hat{r}$ die Goldene Nutzenregel nicht eine höhere Kapitalintensität und Sparquote als die Goldene Regel vorschreiben kann. Dieses Ergebnis erstaunt nicht, weil bekannt ist, daß eine Kapitalintensivierung über die Goldene Regel hinaus ($k > \hat{k}$) (bei dem hier betrachteten Maximierungsproblem über einen unendlichen Zeithorizont) ineffizient und damit sicherlich nicht-optimal ist[1]: Eine Verringerung der Kapitalintensität auf $\hat{k}$ führt sowohl zu einer einmaligen Erhöhung des Konsums, weil die Differenz $k - \hat{k}$ »aufgezehrt« werden kann, als auch gleichzeitig zu einer dauernden Steigerung des Konsumniveaus, weil ja definitionsgemäß $\hat{k}$ das höchste Konsumniveau garantiert. Umgekehrt kann aber eine kleinere Kapitalintensität als bei der Goldenen Regel ($k < \hat{k}$) nicht mit Hilfe des Effizienzbegriffes beurteilt werden: eine dauernde Erhöhung des Konsumniveaus auf das Maximum $\hat{c}$ muß durch einen Konsumverzicht in der Gegenwart erkauft werden, weil k auf $\hat{k}$ erhöht werden muß. Es ist eine Abwägung dieses Verzichts in der Gegenwart mit dem Gewinn in der Zukunft notwendig, wozu eine Nutzenfunktion herbeigezogen werden muß. Es ist einleuchtend, daß — bei hoher Zeitdiskontierung und rasch fallendem Grenznutzen des Prokopfkonsums — sich dieser Konsumverzicht in der Gegenwart nicht lohnt, auch wenn dafür der zukünftige Konsum höher wäre. Daraus folgt, daß die optimale Kapitalintensität und Sparquote nie größer als bei der Goldenen Regel sein können.

13. In Tabelle 2 sind die optimalen Sparquoten bei verschiedenen Annahmen hinsichtlich der Zeitdiskontierung und der Elastizität des Grenznutzens zusammengestellt[2].

Je höher die Rate der Zeitdiskontierung und je schneller der Grenznutzen bei steigendem Prokopfkonsum fällt, desto eher ist eine kleinere Investi-

[1] Der hier verwendete Effizienzbegriff bei unendlichem Zeithorizont wird manchmal als Phelps-Effizienz bezeichnet. Vgl. E. S. Phelps, An Essay on Dynamical Efficiency. In: Golden Rules of Economic Growth, a. a. O., S. 55 ff.

[2] Es ist versucht worden, empirische Werte für den Diskontsatz $\bar{\rho}$ und die Elastizität des Grenznutzens zu ermitteln. Es wird dabei umgekehrt vorgegangen: Es wird angenommen, die beobachtete Wirtschaft befände sich auf dem optimalen Pfad, und es wird abgeleitet, welche Werte dann für die beiden Parameter impliziert sind. Der derart ermittelte Diskontsatz liegt zwischen 3—4% und die Elastizität des Grenznutzens zwischen (minus) 0,05—0,25. Es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, daß solche Schätzungen höchst problematisch sind. Vgl. K. Mera, An Empirical Determination of a Dynamic Utility Function. »The Review of Economics and Statistics«, Cambridge, Mass., Vol. 50 (1968), S. 117 ff. — Fellner errechnet hingegen für die Elastizität des Grenznutzens des Einkommens den viel höheren Wert von (minus) 1,5. W. Fellner, Operational Utility: The Theoretical Background and Measurement. In: Ten Economic Essays in the Tradition of Irving Fisher. New York 1967.

Tabelle 2 — Vergleich der Sparquoten bei der Goldenen Nutzenregel (s^*) und der Goldenen Regel ($\hat{s}$)

Fälle	Diskontsatz	
	$\bar{\rho} = 0$	$\bar{\rho} > 0$
1. Ohne technischen Fortschritt ($\tau = 0$)	$s^* = \hat{s}$	$s^* < \hat{s}$
2. Mit technischem Fortschritt ($\tau > 0$): bei (absoluten) Elastizitäten des Grenznutzens von:		
(a) $\alpha = 0$	N.E.[a]	N.E.[a] (für $\bar{\rho} < \tau$) $s^* = \hat{s}$ (für $\bar{\rho} = \tau$) $s^* < \hat{s}$ (für $\bar{\rho} > \tau$)
(b) $0 < \alpha < 1$	N.E.[a]	N.E.[a] (für $\bar{\rho} < (1-\alpha)\tau$) $s^* = \hat{s}$ (für $\bar{\rho} = (1-\alpha)\tau$) $s^* < \hat{s}$ (für $\bar{\rho} > (1-\alpha)\tau$)
(c) $\alpha = 1$	$s^* = \hat{s}$	$s^* < \hat{s}$
(d) $\alpha > 1$	$s^* < \hat{s}$	$s^* < \hat{s}$

[a] N.E. bedeutet, daß bei der entsprechenden Parameterkonstellation keine optimale Wachstumspolitik abgeleitet werden kann, weil die Bedingung $\bar{\rho} + \alpha\tau \geqslant \tau$ verletzt ist.

tionsquote und damit ein tieferes Niveau des Wachstumspfades (im Vergleich mit der Goldenen Regel) optimal. Diese Schlußfolgerungen sind auch intuitiv einleuchtend.

* * *

Summary: A Simple Introduction to Pontryagin's Maximum Principle in Economic Growth. — The theory of optimal economic growth has been stimulated by the use of Pontryagin's Maximum Principle. The main advantage of this new method is that the problem of maximising a utility integral is much easier to tackle. Moreover it leads to immediate economic interpretation. The principle is applied in this article to an economy in equilibrium growth and the result (called the "Golden Utility Rule") is compared with the "Golden Rule of Capital Accumulation." The two rules are identical if there is no time preference and no technical progress. In most other cases the "Golden Utility Rule" prescribes a lower investment ratio than the "Golden Rule." It can, however, never be larger. It is also shown, how the "Golden Utility Rule" serves as a "turnpike," when the utility integral is maximised over a closed time interval.

*

Résumé: Une simple introduction au principe maximum d'accroissement économique de Pontryagin. — La théorie de l'accroissement économique optimum a reçu de précieuses impulsions du principe-maximum de Pontryagin. L'avantage capital de cette nouvelle méthode réside en ce qu'elle facilite la solution du problème de la maximation de l'intégral d'un courant d'utilité, et qu'elle en rend possible l'interprétation économique. Dans cet article, le principe de Pontryagin est appliqué à une économie qui se trouve en cours d'accroissement équilibré, et le résultat (la dite «règle d'or de l'utilité») est comparé avec la «règle d'or de l'accumulation du capital». Les deux règles sont identiques, s'il n'y a ni préférence de temps ni progrès technique. Dans la plupart des autres cas, la règle d'or de l'utilité exige un taux d'investissement plus bas que l'autre règle d'or. Jamais le taux ne pourrait être plus haut. Il est démontré aussi de quelle manière la règle d'or de l'utilité sert de «turnpike», lorsque l'intégral d'utilité est maximé au-delà d'une période limitée.

*

Resumen: Una simple introducción en el «principio máximo» del crecimiento económico formulado por Pontryagin. — El «principio máximo» de Pontryagin ha venido a ser una valiosa aportación a la teoría del crecimiento económico óptimo. La ventaja principal de este nuevo método consiste en que gracias a él se puede simplificar sustancialmente el complicado problema de hacer máximo el integral de una corriente de utilidad y de interpretarlo de una manera económicamente razonable. En el presente artículo se aplica el «principio» a una economía con crecimiento equilibrado y se compara el resultado obtenido (que denominamos la «regla de oro de utilidad») con la «regla de oro de la acumulación de capital». Las dos reglas son idénticas en el caso de que no existan ni preferencias en el tiempo ni progreso técnico. En casi todos los demás casos la «regla de oro de utilidad» requiere una cuota de inversión que es inferior a la que corresponde a la «regla de oro de acumulación de capital»; dicha cuota no puede ser, sin embargo, jamás superior. También se demuestra, cómo la «regla de oro de utilidad» sirve de «turnpike» a la línea óptima de crecimiento, si se hace máximo la integral de utilidad para un intervalo temporal limitado.

*

Riassunto: Una semplice introduzione al principio-maximum di Pontryagin. — La teoria di un'ottimale espansione economica ha ricevuto dal principio-maximum di Pontryagin impulsi preziosi. Il vantaggio principale di questo nuovo metodo consiste nel fatto che il complicato problema della massimizzazione dell'integrale di una corrente di profitto può essere fortemente semplificato e significativamente interpretato dal punto di vista economico. Il principio viene applicato in questa ricerca ad un'economia in espansione ed in equilibrio, e il risultato (chiamato «regola d'oro del profitto») è confrontato con la «regola d'oro dell'accumulazione del capitale». Entrambe le due regole sono identiche quando non c'è alcuna preferenza di tempo e alcun progresso tecnico. Nella maggior parte degli altri casi, la «regola d'oro del profitto» prescrive un tasso degli investimenti più piccolo della «regola d'oro»; esso non può essere, però, mai più grande. Viene anche mostrato come la «regola d'oro del profitto» serva da «turnpike» all'ottimale cammino di espansione quando il profitto integrale è massimizzato al di là di un limitato orizzonte di tempo.